Exercices corrigés
sur les séries entières

1 Enoncés

Exercice 1 Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ suivantes :

$$a_n = \ln n, \quad a_n = (\ln n)^n, \quad a_n = (\sqrt{n})^n, \quad a_n = e^{n^{1/3}}, \quad a_n = \frac{n^n}{n!}, \quad a_n = \arcsin\left(\frac{n+1}{1+n\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 2 Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum \frac{a^n}{1+b^n} z^n$$

selon les valeurs de $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3 Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ suivantes :

$$a_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad a_n = \begin{cases} 2^n & \text{si } \exists k \in \mathbb{N} \colon n = k^3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 4 Déterminer le rayon de convergence R des séries entières réelles $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ suivantes, puis calculer leurs sommes sur $]-R, R[$:

$$a_n = n, \quad a_n = n(n-1), \quad a_n = n^2.$$

Exercice 5 Déterminer le rayon de convergence R des séries entières réelles $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ suivantes, puis calculer leurs sommes sur $]-R, R[$:

$$a_n = \frac{1}{n(n+2)}, \quad a_n = \frac{1}{n} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right).$$

Exercice 6 Calculer

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 - 3n + 2}{2^n}.$$

Exercice 7 Calculer le développement en série entière en zéro des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}, \quad g(x) = \ln(x^2 - 5x + 6), \quad h(x) = \int_0^x \cos t^2 \, \mathrm{d}t.$$

Exercice 8 Calculer, selon les valeurs du paramètre réel t, le développement en série entière en zéro de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2tx + 1}.$$

Exercice 9 Calculer le développement en série entière en zéro des fonctions suivantes :

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x\sin a}{1 - x\cos a}\right) \quad \text{avec } a \in \left]0, \pi\right[, \quad g(x) = \big(\arcsin x\big)^2.$$

Exercice 10 Soit

$$f_p(x) := \frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-p)}.$$

(1) Vérifier que

$$f_p(x) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\lambda_k}{x-k} \quad \text{avec} \quad \lambda_k = (-1)^{p-k}\frac{k}{p!}C_p^k.$$

(2) En déduire le développemenent en série entière en zéro de la fonction f_p.

Exercice 11 On pose $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$, puis pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = -a_n - 2b_n \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = 3a_n + 4b_n.$$

Calculer les rayons de convergence et les sommes des séries entières

$$\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!}x^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{b_n}{n!}x^n.$$

Exercice 12 Montrer que l'équation différentielle $3xy' + (2-5x)y = x$ admet une solution développable en série entière autour de zéro.

Exercice 13 On se propose d'obtenir le développement en série entière de la fonction tangente. Pour $x \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$, on pose $f(x) = \operatorname{tg} x$.

(1) En remarquant que $f' = 1 + f^2$, montrer qu'il existe une suite (P_n) de polynômes à coefficients dans $\mathbb{N}$ telle que $f^{(n)} = P_n \circ f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(2) En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que la série de MacLaurin de f a un rayon de convergence R supérieur ou égal à $\pi/2$.

(3) On note a_n les coefficients du développement précédent et g la somme de la série entière $\sum a_n$. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$(n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.$$

En déduire que, pour tout $x \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$, $f(x) = g(x)$, et que $R = \pi/2$.

(4) Calculer $a_0, a_1, \ldots, a_7$.

(5) Vérifier que la fonction $x \mapsto \operatorname{th} x$ est développable en série entière. Préciser le rayon de convergence et la valeur des coefficients en fonction des coefficients a_n ci-dessus.

2 Solutions

Solution de l'exercice 1

- On a :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{\ln\left(n(1+n^{-1})\right)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln(1+n^{-1})}{\ln n} \longrightarrow 1 \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty,$$

  donc $R = 1$.
- Puisque $|a_n|^{1/n} = \ln n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$, la règle d'Hadamard implique que $R = 0$.
- Puisque $|a_n|^{1/n} = \sqrt{n} \to \infty$ lorsque $n \to \infty$, la règle d'Hadamard implique que $R = 0$.
- Puisque $|a_n|^{1/n} = e^{n^{1/3}n^{-1}} = e^{n^{-2/3}} \to 1$ lorsque $n \to \infty$, la règle d'Hadamard implique que $R = 1$.
- On a :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty,$$

  car

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim n\frac{1}{n} = 1.$$

  Donc $R = 1/e$.
- On a :

$$\begin{aligned}
\frac{n+1}{1+n\sqrt{2}} &= \frac{1+n^{-1}}{\sqrt{2}+n^{-1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1+n^{-1}}{1+(n\sqrt{2})^{-1}} \\
&\sim \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n\sqrt{2}}\right) \\
&\sim \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] \\
&\sim \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

  On doit donc développer arcsin à l'ordre 1 en $1/\sqrt{2}$. Puisque $\arcsin'(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, on obtient $\arcsin'(1/\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, puis

$$\begin{aligned}
a_n &= \arcsin\left(\frac{n+1}{1+n\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi}{4} \\
&\sim \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{n}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&\sim \arcsin'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{n} \\
&= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{n} \\
&= \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{n} \;=:\; \alpha_n.
\end{aligned}$$

  Or, il est facile de voir que $(\alpha_n)^{1/n} \to 1$ lorsque $n \to \infty$, de sorte que $R = 1$.

Solution de l'exercice 2 Si $a = 0$, alors $a_n \equiv 0$ et donc $R = \infty$. Supposons donc $a \neq 0$.

- Si $b > 1$, alors

$$\frac{a^n}{1+b^n} \sim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n, \quad \text{donc} \quad \left(\frac{a^n}{1+b^n}\right)^{1/n} \longrightarrow \frac{a}{b} \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty.$$

  La règle d'Hadamard montre alors que $R = b/a$.

- Si $b = 1$, alors

$$\frac{a^n}{1+b^n} = \frac{a^n}{2}, \quad \text{donc} \quad \left(\frac{a^n}{1+b^n}\right)^{1/n} = \frac{a}{2^{1/n}} \longrightarrow a \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty.$$

  La règle d'Hadamard montre alors que $R = 1/a$.

- Si $b < 1$, alors

$$\frac{a^n}{1+b^n} \sim_{n\to\infty} a^n, \quad \text{donc} \quad \left(\frac{a^n}{1+b^n}\right)^{1/n} \longrightarrow a \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty.$$

  La règle d'Hadamard montre alors que $R = 1/a$.

Solution de l'exercice 3 Dans les deux cas, on utilise la règle d'Hadamard.

- On a :

$$|a_n|^{1/n} = \begin{cases} n^{1/n} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

  or,

$$\ln n^{1/n} = \frac{1}{n} \ln n \longrightarrow 0, \quad \text{donc} \quad n^{1/n} \longrightarrow e^0 = 1 \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty.$$

  Il s'ensuit que $\limsup |a_n|^{1/n} = 1$, et que $R = 1$.

- On a :

$$|a_n|^{1/n} = \begin{cases} 2 & \text{si } \exists k \in \mathbb{N} \colon n = k^3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

  On voit donc que $\limsup |a_n|^{1/n} = 2$, ce qui implique que $R = 1/2$.

Solution de l'exercice 4

- On a :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \longrightarrow 1, \quad \text{donc} \quad R = 1.$$

  Calculons la somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2},$$

  où la deuxième égalité s'explique par le fait que $\sum_{n\geq 1} n x^{n-1}$ est la dérivée de

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad x \in \left]-1, 1\right[.$$

- On a :
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)n}{n(n-1)} \longrightarrow 1, \quad \text{donc} \quad R = 1.$$
Calculons la somme :
$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n = x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2x^2}{(1-x)^3},$$
où la deuxième égalité s'explique par le fait que $\sum n(n-1)x^{n-2}$ est la dérivée seconde de
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad x \in \left]-1, 1\right[.$$
- On a :
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \longrightarrow 1, \quad \text{donc} \quad R = 1,$$
puis, d'après ce qui précède,
$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \big(n(n-1) + n\big)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} nx^n \\ &= \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} \\ &= \frac{x^2 + x}{(1-x)^3}. \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 5

- On a :
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)} \longrightarrow 1 \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty,$$
donc $R = 1$. Par réduction de la fraction rationnelle en éléments simples,
$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right), \quad \text{de sorte que} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}\right).$$
D'une part,
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right) \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = -\ln(1-x),$$
et d'autre part, pour $x \neq 0$,
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+2} = x^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2} = \frac{1}{x^2}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - x - \frac{x^2}{2}\right] = -\frac{1}{x^2}\left[\ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2}\right].$$
Finalement, la somme est nulle si $x = 0$ et, pour $x \neq 0$,
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}\right)\ln(1-x) + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)\right).$$

- On a :

$$|a_n|^{1/n} = \frac{1}{n^{1/n}} \left|\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)\right|^{1/n}.$$

Or,

$$n^{1/n} \longrightarrow 1 \quad \text{puisque} \quad \ln n^{1/n} = \frac{1}{n}\ln n \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty,$$

et

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)\right|^{1/n} = 1 \quad \text{puisque} \quad \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) = 1 \quad \text{pour tout} \quad n \in 3\mathbb{N}.$$

Donc $\limsup |a_n|^{1/n} = 1$, de sorte que $R = 1$. Soit $f\colon\ ]-1,1[\to \mathbb{R}$ la somme de la série entière. Alors, f est dérivable, et sa dérivée satisfait

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathscr{Re}\,(j^n)\, x^{n-1} = \mathscr{Re}\left(j \sum_{n=1}^{\infty} (jx)^{n-1}\right) = \mathscr{Re}\left(\frac{j}{1-jx}\right),$$

où $j := e^{2i\pi/3}$. Rappelons que $\overline{j} = j^2$, que $j^3 = 1$ et que $1 + j + j^2 = 0$. On a alors :

$$f'(x) = \mathscr{Re}\left(\frac{j(1-j^2x)}{(1-jx)(1-j^2x)}\right) = \mathscr{Re}\left(\frac{j-x}{1+x+x^2}\right) = -\frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

On en déduit que

$$f(x) = -\frac{1}{2}\int_0^x \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right).$$

Solution de l'exercice 6

- D'après l'exercice 4, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{x}{(1-x)^2} \quad \text{avec} \quad x = \frac{1}{2}, \quad \text{donc} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2.$$

- D'après l'exercice 4, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{x^2+x}{(1-x)^3} \quad \text{avec} \quad x = \frac{1}{2}, \quad \text{donc} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6.$$

- On a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2-3n+2}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} - 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 6 - 3\cdot 2 + 2\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-1} = 4.$$

Solution de l'exercice 7

- La décomposition en éléments simples donne :

$$f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-x/2} + \frac{1}{1-x} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n.$$

- On a :
$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)=6\left(1-\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{3}\right),$$
donc
$$\begin{aligned}
g(x) &= \ln\left(x^2-5x+6\right)\\
&= \ln 6+\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)+\ln\left(1-\frac{x}{3}\right)\\
&= \ln 6+\int_0^{x/2}\frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t+\int_0^{x/3}\frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t\\
&= \ln 6+\int_0^{x/2}\sum_{n=0}^{\infty}t^n\,\mathrm{d}t+\int_0^{x/3}\sum_{n=0}^{\infty}t^n\,\mathrm{d}t\\
&= \ln 6+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{n+1}}{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x/3)^{n+1}}{n+1}\\
&= \ln 6+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)\frac{x^n}{n}.
\end{aligned}$$
- On a, avec un rayon de convergence infini,
$$\cos u=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{u^{2n}}{(2n)!}\quad\text{donc}\quad\cos t^2=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{4n}}{(2n)!}$$
La fonction h est développable en série entière, avec rayon de convergence infini, et pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$h(x)=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{4n}}{(2n)!}\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\int_0^x\frac{t^{4n}}{(2n)!}\,\mathrm{d}t\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+1}}{(2n)!(4n+1)}.$$

Solution de l'exercice 8

- Si $|t|<1$, on pose $\theta:=\arccos t\in\,]0,\pi[$, de sorte que
$$x^2-2tx+1=x^2-2x\cos\theta+1=\left(x-e^{i\theta}\right)\left(x-e^{-i\theta}\right).$$
On écrit alors une décomposition en élémnts simples :
$$\frac{1}{x^2-2tx+1}=\frac{a}{x-e^{i\theta}}+\frac{b}{x-e^{-i\theta}},$$
et par identification, on trouve
$$a=\frac{1}{2i\sin\theta}=-b.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2-2tx+1} &= \frac{1}{2i\sin\theta}\left(\frac{1}{x-e^{i\theta}}-\frac{1}{x-e^{-i\theta}}\right)\\
&= \frac{1}{2i\sin\theta}\left(-\frac{e^{-i\theta}}{1-xe^{-i\theta}}+\frac{e^{i\theta}}{1-xe^{i\theta}}\right)\\
&= \frac{1}{2i\sin\theta}\left(e^{i\theta}\sum_{n=0}^{\infty}e^{in\theta}x^n-e^{-i\theta}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-in\theta}x^n\right)\\
&= \frac{1}{2i\sin\theta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{i(n+1)\theta}-e^{-i(n+1)\theta}\right)x^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\big((n+1)\theta\big)}{\sin\theta}x^n
\end{aligned}$$

où la troisième égalité est valide pour $|x|<1$.

- Si $t=1$, alors

$$\frac{1}{x^2-2xt+1}=\frac{1}{(1-x)^2}=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$

- Si $t=-1$, alors

$$\frac{1}{x^2-2xt+1}=\frac{1}{\big(1-(-x)\big)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n.$$

- Si $t>1$, on écrit $t=\operatorname{ch}0$ avec $\theta>0$, et alors

$$x^2-2tx+1=x^2-2x\operatorname{ch}\theta+1=\big(x-e^{\theta}\big)\big(x-e^{-\theta}\big).$$

On écrit alors une décomposition en élémnts simples :

$$\frac{1}{x^2-2tx+1}=\frac{a}{x-e^{\theta}}+\frac{b}{x-e^{-\theta}},$$

et par identification, on trouve

$$a=\frac{1}{2\operatorname{sh}\theta}=-b.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2-2tx+1} &= \frac{1}{2\operatorname{sh}\theta}\left(\frac{1}{x-e^{\theta}}-\frac{1}{x-e^{-\theta}}\right)\\
&= \frac{1}{2\operatorname{sh}\theta}\left(-\frac{e^{-\theta}}{1-xe^{-\theta}}+\frac{e^{\theta}}{1-xe^{\theta}}\right)\\
&= \frac{1}{2\operatorname{sh}\theta}\left(e^{\theta}\sum_{n=0}^{\infty}e^{n\theta}x^n-e^{-\theta}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n\theta}x^n\right)\\
&= \frac{1}{2\operatorname{sh}\theta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{(n+1)\theta}-e^{-(n+1)\theta}\right)x^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\big((n+1)\theta\big)}{\operatorname{sh}\theta}x^n,
\end{aligned}$$

où la troisième égalité est valide pour $|x|<e^{-\theta}$.

- Si $t < -1$, on écrit $xt = (-x)(-t)$, et on obtient le développement souhaité en s'appuyant sur le cas précédent.

Solution de l'exercice 9

- Si $\cos a = 0$, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Si $\cos a \neq 0$, la fonction f est définie sur

$$\left]-\infty, \frac{1}{\cos a}\right[\cup \left]\frac{1}{\cos a}, \infty\right[.$$

Pour x dans le domaine de définition,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1 - x\cos a)\sin a - (-\cos a)x\sin a}{(1 - x\cos a)^2}\left(1 + \left(\frac{x\sin a}{1 - x\cos a}\right)^2\right)^{-1} \\ &= \frac{\sin a}{(1 - x\cos a)^2}\left(1 + \left(\frac{x\sin a}{1 - x\cos a}\right)^2\right)^{-1} \\ &= \frac{\sin a}{(1 - x\cos a)^2 + (x\sin a)^2} \\ &= \frac{\sin a}{x^2 - 2x\cos a + 1}. \end{aligned}$$

D'après l'exercice 8, f' est développable en série entière et, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin\big((n+1)a\big)x^n.$$

On peut alors intégrer terme à terme, et obtenir une série entière de même rayon de convergence :

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \sin\big((n+1)a\big)\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

- La fonction f est deux fois dérivable sur $]-1, 1[$, et l'on a :

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}\arcsin x \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{2x}{(1 - x^2)^{3/2}}\arcsin x + \frac{2}{1 - x^2} = \frac{x}{1 - x^2}f'(x) + \frac{2}{1 - x^2}.$$

Donc, pour $x \in]-1, 1[$, on a le système

$$(\mathscr{S}) \quad \begin{cases} (1 - x^2)f''(x) - xf'(x) = 2, \\ f(0) = f'(0) = 0. \end{cases}$$

D'après la théorie des équations différentielles, le système $(\mathscr{S})$ détermine $f = \arcsin$ de manière unique. Cherchons maintenant la solution de $(\mathscr{S})$ au voisinage de zéro, sous forme d'une série entière de rayaon de convergence $R > 0$: pour $|x| < R$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}.$$

En introduisant ces expressions dans l'équation différentielle, on obtient :

$$(1 - x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 2,$$

soit

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = 2,$$

soit

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n x^n = 2,$$

soit encore

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n x^n = 2,$$

soit enfin

$$\sum_{n=0}^{\infty} \big((n+2)(n+1)a_{n+2} - n^2 a_n\big) x^n = 2.$$

Puisque $f(0) = 0$, a_0. Puis, par unicité du développement en série entière de la fonction constante égale à 2, on obtient $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, puis

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+2} = \frac{n^2}{(n+2)(n+1)}.$$

Il s'ensuit que les coefficients d'ordre impair sont tous nuls, et que

$$a_4 = \frac{2^2}{4 \cdot 3}, \quad a_6 = \frac{4^2}{6 \cdot 5} \cdot \frac{2^2}{4 \cdot 3}, \quad a_8 = \frac{6^2}{8 \cdot 7} \cdot \frac{4^2}{6 \cdot 5} \cdot \frac{2^2}{4 \cdot 3},$$

puis, inductivement,

$$a_{2n} = \frac{\big((2n-2) \times \cdots \times 4 \times 2\big)^2}{(2n) \times (2n-1) \times \cdots \times 4 \times 3} = \frac{2^{2n-1}\big((n-1)!\big)^2}{(2n)!}.$$

La série entière

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}\big((n-1)!\big)^2}{(2n)!} x^{2n}$$

est solution du système $(\mathscr{S})$ sur $]-R, R[$, où R est le rayon de convergence, que nous calculons maintenant.

$$\left| \frac{2^{2n+1}\big(n!\big)^2 x^{2n+2}}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{2^{2n-1}\big((n-1)!\big)^2} \right| = \frac{4x^2 n^2}{(2n+2)(2n+1)} \longrightarrow x^2 \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty.$$

D'après la règle de d'Alembert, la série converge (absolument) pour $|x| < 1$ et diverge grossièrement pour $|x| > 1$. On a donc $R = 1$. En conclusion, f est déeloppable en série entière, et

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \arcsin^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}\big((n-1)!\big)^2}{(2n)!} x^{2n}.$$

Solution de l'exercice 10

(1) Faisons une récurrence sur p.

- Pour $p = 1$, $\lambda_1 = 1$, donc la formule est satisfaite.

- Supposons la formule satisfaite à l'ordre $p-1$. Alors,

$$f_p(x) = \left(\sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{p-1-k} \frac{k}{(p-1)!} C_{p-1}^k \frac{1}{x-k}\right) \frac{1}{x-p}.$$

Or, par décomposition en éléments simples,

$$\frac{1}{x-k}\frac{1}{x-p} = \frac{a}{x-k} + \frac{b}{x-p}.$$

Par identification, on trouve

$$a = -\frac{1}{p-k} = -b,$$

de sorte que

$$\frac{1}{x-k}\frac{1}{x-p} = -\frac{1}{(p-k)(x-k)} + \frac{1}{(p-k)(x-p)}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
f_p(x) &= \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{p-1-k} \frac{k}{(p-1)!} C_{p-1}^k \frac{1}{p-k} \left(\frac{1}{x-p} - \frac{1}{x-k}\right) \\
&= -\sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{p-1-k} \frac{k}{(p-1)!} C_{p-1}^k \frac{1}{p-k} \frac{1}{x-k} \\
&\qquad + \left(\sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{p-1-k} \frac{k}{(p-1)!} C_{p-1}^k \frac{1}{p-k}\right) \frac{1}{x-p} \\
&= \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{p-k} \frac{1}{(k-1)!(p-k)!} \frac{1}{x-k} + \left(\sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{p-1-k} \frac{1}{(k-1)!(p-k)!}\right) \frac{1}{x-p} \\
&= \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{p-k} \frac{k}{p!} C_p^k \frac{1}{x-k} + \left(\sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{p-1-k} \frac{1}{(k-1)!(p-k)!}\right) \frac{1}{x-p}.
\end{aligned}$$

Reste à vérifier que

$$\frac{1}{(p-1)!} =: \lambda_p = \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{p-1-k} \frac{1}{(k-1)!(p-k)!}.$$

Or,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{p-1-k} \frac{(p-1)!}{(k-1)!(p-k)!} &= \sum_{k=0}^{p-2} (-1)^{p-2-k} \frac{(p-1)!}{k!(p-1-k)!} \\
&= -\sum_{k=0}^{p-2} (-1)^{p-1-k} C_{p-1}^k \\
&= -\left(\sum_{k=0}^{p12} (-1)^{p-1-k} C_{p-1}^k - 1\right) \\
&= -\big((1-1)^{p-1} - 1\big) \quad = \quad 1.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$f_p(x) = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} \frac{1}{(k-1)!(p-k)!} \frac{1}{x-k} = \sum_{k=1}^{p} \frac{\lambda_k}{x-k}.$$

(2) Par suite, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned} f_p(x) &= \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} \frac{k}{p!} C_p^k \left(-\frac{1}{k}\right) \frac{1}{1-x/k} \\ &= \frac{(-1)^p}{p!} \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} C_p^k \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{k}\right)^n \\ &= \frac{(-1)^p}{p!} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} \frac{C_p^k}{k^n} \right) x^n. \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 11 On a, sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix},$$

d'où l'on tire que

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}, \qquad \text{où} \qquad A := \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Le calcul de a_n et b_n repose alors sur le calcul de A^n, qui peut se faire en diagonalisant A. On vérifie sans peine que les valeurs propres de A sont 1 et 2, et que A admet la famille

$$\mathscr{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

pour base de vecteurs propres. On rappelle que, si Λ désigne la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A dans la base $\mathscr{B}$, alors

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = P^{-1}AP, \qquad \text{où} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$. Ainsi, $A = P\Lambda P^{-1}$, puis $A^n = P\Lambda^n P^{-1}$. Un calcul élémentaire donne

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

puis

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 2^{n+1} & 2 - 2^{n+1} \\ -3 + 3 \cdot 2^n & -2 + 3 \cdot 2^n \end{bmatrix},$$

et on obtient alors

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2^{n+1} \\ 3(2^n - 1) \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que

$$\sum \frac{a_n}{n!} x^n = \sum \frac{3 - 2^{n+1}}{n!} x^n \qquad \text{et} \qquad \sum \frac{b_n}{n!} x^n = \sum \frac{3(2^n - 1)}{n!} x^n.$$

D'une part
$$\frac{3-2^{n+2}}{(n+1)!}\frac{n!}{3-2^{n+1}} = \frac{1}{n+1}\frac{3-2^{n+2}}{3-2^{n+1}} \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty,$$
et d'autre part,
$$\frac{3(2^{n+1}-1)}{(n+1)!}\frac{n!}{3(2^n-1)} = \frac{1}{n+1}\frac{2^{n+1}-1}{2^n-1} \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty,$$
de sorte que les rayons de convergences sont tous deux infinis. Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}x^n = 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = 3e^x - 2e^{2x}$$
et
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!}x^n = 3\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) = 3\big(e^{2x} - e^x\big).$$

Solution de l'exercice 12 On cherche $y(x)$ sous la forme
$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n, \qquad x \in \left]-R, R\right[.$$
En appliquant le théorème de dérivation terme à terme des séries entières, on doit avoir alors
$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x_{n-1}, \qquad x \in \left]-R, R\right[,$$
et l'équation différentielle s'écrit alors
$$3x\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + (2-5x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x,$$
soit
$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big[(3na_n + 2a_n)x^n - 5a_n x^{n+1}\Big] = x,$$
soit encore,
$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big[(3n+2)a_n x^n - 5a_{n+1}x^{n+2}\Big] - 5a_0 x = x.$$
On en déduit que $2a_0 = 0$, que $5a_1 - 5a_0 = 1$ et que, pour tout $n \geq 2$, $(3n+2)a_n - 5a_{n-1} = 0$. Ainsi,
$$a_0 = 0, \qquad a_1 = \frac{1}{5}, \qquad \text{puis} \qquad a_n = \frac{5}{3n+2}a_{n-1} = \frac{5^{n-1}}{\prod\limits_{2\leq k\leq n}(3k+2)} \cdot \frac{1}{5} = \frac{5^{n-2}}{\prod\limits_{2\leq k\leq n}(3k+2)}.$$
On obtient donc :
$$y(x) = \frac{1}{5}x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^{n-2}}{\prod\limits_{2\leq k\leq n}(3k+2)}x^n.$$

Puisque

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5}{3(n+1)+2} \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to 0,$$

le rayon de convergence de la série entière est égal à l'infini.

Solution de l'exercice 13

(1) La fonction f est le quotient de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $I =]-\pi/2, \pi/2[$ dont le dénominateur ne s'annule pas (sur cet intervalle). C'est donc elle-même une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I. Considérons la propriété

($\mathscr{P}_n$) *Il existe un polynôme P_n à coefficients dans $\mathbb{N}$ tel que $f^{(n)} = P_n \circ f$ sur I.*

Il est clair que ($\mathscr{P}_0$) est vraie, avec $P_0 = X$. On remarque que, puisque $f' = 1 + f^2$, la propriété ($\mathscr{P}_1$) est aussi vraie, avec $P_1 = 1 + X^2$. Supposons maintenant la propriété ($\mathscr{P}_k$) vraie pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, avec $n \geq 1$, et montrons que ($\mathscr{P}_{n+1}$) est encore vraie. On a :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)} &= (1+f^2)^{(n)} \\ &= (f^2)^{(n)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} f^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (P_k \circ f)(P_{n-k} \circ f) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k P_k P_{n-k} \right) \circ f, \end{aligned}$$

où la troisième égalité résulte de la formule de Leibniz. On a donc bien $f^{(n+1)} = P_{n+1} \circ f$, où le polynôme

$$P_{n+1} := \sum_{k=0}^{n} C_n^k P_k P_{n-k}$$

est à coefficients dans $\mathbb{N}$ d'après l'hypothèse de récurrence.

(2) D'après la formule de Taylor avec reste intégral, pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

La fonction tangente étant impaire, seuls les termes d'ordre impair de la partie polynômiale sont non nuls, et il suffit de considérer la dernière formule pour $x \in [0, \pi/2[$. D'après la question (1), $f^{(k)}(u) = P_k(\operatorname{tg} u) \geq 0$ pour tout $u \in [0, \pi/2[$. Par conséquent, pour $x \in [0, \pi/2[$,

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \geq 0,$$

et la suite des sommes partielles de la série de MacLaurin de f satisfait :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x) - \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \leq f(x).$$

Cette suite, qui est croissante (puisque les termes $(f^{(k)}(0)x^k)/(n!)$ sont positifs), est donc majorée. On en déduit qu'elle est convergente. Ainsi, la série de MacLaurin de f est convergente pour tout $x \in I$, de sorte que son rayon de convergence est supérieur où égal à $\pi/2$.

(3) Posons

$$a_n := \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{et} \qquad g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \left(x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right).$$

On a vu que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k P_k P_{n-k}.$$

En divisant cette équation par $n!$ et en l'évaluant en $\operatorname{tg} 0 = 0$, on obtient

$$\frac{P_{n+1}(\operatorname{tg} 0)}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_k(\operatorname{tg} 0)}{k!} \frac{P_{n-k}(\operatorname{tg} 0)}{(n-k)!}, \qquad \text{soit} \qquad (n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.$$

Tous les coefficients de la série de MacLaurin sont donc donnés par cette dernière relation, avec les valeurs *initiales* $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$. Vérifions que f coïncide avec la somme de sa série de MacLaurin sur l'intervalle I. On a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \right) x^n \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \right) x^n \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \left(a_k x^k\right)\left(a_{n-k} x^{n-k}\right) \right). \end{aligned}$$

La dernière double somme apparaît comme le produit de Cauchy de la série $\sum a_n x^n$ avec elle-même, et on en déduit que $g'(x) = 1 + g^2(x)$. De plus, $g(0) = a_0 = 0$. Pour $x \in I$, posons alors

$$h(x) := \operatorname{arctg}(g(x)).$$

La fonction h est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$,

$$h'(x) = \frac{g'(x)}{1 + g^2(x)} = 1,$$

et en intégrant, on obtient $h(x) = h(0) + (x - 0) = x$. Ainsi, pour tout $x \in I$, $g(x) = \operatorname{tg} x = f(x)$. La fonction tangente est donc développable en série entière à l'origine, et coïncide avec sa série de MacLaurin pour tout $x \in I$. Comme $g(x) = f(x)$ tend vers l'infini lorsque x tend vers $\pi/2$ par valeurs inférieures, on voit que le rayon de convergence est inférieur ou égal à $\pi/2$, donc en fait égal à $\pi/2$.

(4) On sait déjà que $a_0 = a_2 = a_4 = a_6 = 0$ et que $a_1 = 1$. La relation $(n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, permet d'obtenir :

$$a_3 = \frac{1}{3}, \qquad a_5 = \frac{2}{15} \qquad a_7 = \frac{17}{315}.$$

(5) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{-i(ix)} - e^{i(ix)}}{e^{-i(ix)} + e^{i(ix)}} = \frac{-2i\sin(ix)}{2\cos(ix)} = \frac{1}{i}\operatorname{tg}(ix),$$

et donc, pour tout $x \in I$,

$$\operatorname{th} x = \frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}(ix)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_{2n+1}x^{2n+1}.$$

Le rayon de convergence de cette série entière est bien sûr encore égal à $\pi/2$.